期权定价模型研究

永安期货研究院金融期货部：周博 王晓宝

衍生品市场中，期权的成功很大程度得益于其定价模型的标准化，这使得大众对期权的公允价达到了一致的认可，从而交易顺利进行。按照执行方式划分，期权分为欧式期权和美式期权；按照标的物性质划分，又分为现货期权和期货期权。本文主要研究商品类美式期货期权，因此，本部分重点放在做市商常用的美式期货期权的定价公式研究。

一、最小二乘蒙特卡洛模拟期权定价模型

Tilley（1993）最早提出了将蒙特卡洛方法应用于美式期权定价一种解决办法，但由于这些解决办法存在某些缺陷，没有得到广泛的应用。在这方面的突破性研究当属 Longstaff 和 Schwartz（2001），他们引入最小二乘法来确定每一时刻衍生证券的连续价值和相关变量价值之间的最佳拟合关系，并以此判断在该时刻是否提前履行期权。目前，最小二乘蒙特卡洛模拟（Least Square Monte Carlo）已经成为使用蒙特卡洛模拟方法来进行美式期权定价的标准方法。

（一）LSM 模拟算法基本思想

最小二乘蒙特卡洛模拟的基本思想是：与传统的蒙特卡洛模拟类似，将期权的到期剩余时间划分为有限个时间间隔，并生成随机的标的资产价格路径样本，利用最小二乘法对样本路径在各

时刻的截面数据进行回归求得期权的持有期望报酬，并将其与在该时刻提前行权的收益相比较，相对较大值即为该时刻的期权价值，如果行权价值大于持有的期望价值，则立即行权为最优策略，否则，继续持有期权。

（二）LSM 模拟算法的算法实现步骤

LSM 模拟方法的基本步骤如下：首先，生成标的资产价格的样本路径；其次，从期权到期日开始逆向求解，得到每条样本路径上的最优期权执行时间和相应的期权收益；最后，将每条样本路径的期权收益用无风险利率贴现，然后取它们的均值即得到模拟的期权价值。下面我们以单一标的资产美式看跌期权定价为例，说明 LSM 模拟方法的算法实现步骤。

第一步：生成标的资产价格样本路径

根据期权理论，我们假设期权的到期日为T，执行时间为T^*，则对美式期权而言，$T^* \in [0, T]$，即期权可以在到期日前的任意时刻执行。由于期权在执行时刻的收益不仅受到标的资产价格的影响，也可能受到从期权发行日(t=0)至到期日 T 之间标的资产价格所经过的路径所影响，因此，期权在执行时间T^*的价值为：

$$f=e^{-rT^*}E^Q[f(S_0, S_1, \dots, S_T^*, \dots, S_T)] \tag{1}$$

其中，E^Q为风险中性测度下的期望值，r为无风险利率，$S_0, S_1, \dots S_T^*, \dots S_T$为从发行日至到期日之间标的资产价格所经过的路径。蒙特卡洛模拟就是通过随机抽样求解式(1)，从而得到期权价值的一种数值方法。所以，运用蒙特卡洛方法模拟期权定

价的第一步便是通过随机抽样生成标的资产价格的样本路径$S_0, S_1, \dots S_T^*, \dots S_T$，假设标的资产的价格服从几何布朗运动：

$$dS = S\alpha\, dt + S\sigma\, dz \tag{2}$$

其中，ds为标的资产价格的微小变动，α 为标的资产的收益率，σ 为标的资产价格的波动率，z为维纳过程，dz为维纳增量，$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$，ε 服从标准正态分布。在风险中性假设下，用r代替α。根据伊藤定理，可将（2）改写为：

$$d\ln S = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dz \tag{3}$$

为了应用蒙特卡洛方法，我们需要将（3）式离散化：将时间区间[0, t]均分为N个子区间，则每个子区间的长度为$\Delta t = T/N$，从而式(3)可得：

$$\ln S_i - \ln S_{i-1} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\cdot \varepsilon_i \tag{4}$$

其中，$i \in \{0,1,\dots,N\}$，ε_i为服从均值为0，标准差为1的标准正态分布的随机样本。

由（4）式可得，给定发行日的标的资产价格S_0，任意时刻标的资产价格S_i由下式给定：

$$S_i = \exp(\ln S_0 + i\cdot[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\cdot \varepsilon_i]) \tag{5}$$

由（5）式可以得到标的资产价格 S 的一条样本路径$h_j(S_0, S_1, \dots, S_T), j \in \{1,2,\dots,M\}$，其中，M为模拟样本路径的数量。经过M次模拟，我们得到样本路径矩阵$P_{M\times(N+1)}$。

第二步：计算每条样本路径的最优执行时间和期权收益

在时刻i，看跌期权在样本路径上的内在价值$I_i^j(S_i^j)=\max\{X-S_i^j,0\}$，其中，X为执行价格，$S_i^j$为样本路径j在执行时间i的标的资产价格。对于美式期权，由于可以提前执行，这使得我们在决定最优执行时间时，必须权衡该时刻立即执行期权的即时收益（即内在价值）与继续持有该期权的期望收益，即：

$$f_i^j(S_i^j)=\max\{I_i^j(S_i^j),E^Q[e^{-r\Delta t}f_{i+1}^j(S_{i+1}^j)|S_i^j]\} \quad (6)$$

其中，$E^Q[e^{-r\Delta t}f_{i+1}^j(S_{i+1}^j)|S_i^j]$为在当前标的产价格$S_i^j$条件下继续持有期权的期望收益，该期望收益只有通过逆向求解的方法求得，因为它依赖于下一步执行期权的决策。换句话说，为了知道现在的最优策略，我们必须首先知道未来的最优策略，而该策略由期望收益的价值方程（6）式间接地定义。这正是用蒙特卡洛方法模拟美式期权定价的难点所在，也是为什么过去认为蒙特卡洛方法不适合模拟美式期权定价的主要原因。因此我们介绍使用LSM方法计算该期望收益的近似算法。

LSM方法通过回归得到一个当前标的资产价格S_i^j的简单二次多项式，并用它近似式(6)中的条件期望，即：

$$E^Q[e^{-r\Delta t}f_{i+1}^j(S_{i+1}^j)|S_i^j]\approx a_1+a_2S_i^j+a_3S_i^{j2} \quad (7)$$

我们将所有样本路径在时刻i的价格S_i作为X值，将对应的样本路径上的未来收益作为Y值，并采用最小二乘法进行回归，求得回归系数a_1,a_2和a_3。

为了求解每条样本路径上的最优执行时间和相应的期权收益，我们从最后阶段（即到期日）开始。在到期日，期权执行的

决策很简单：执行期权当且仅当期权是溢价的，此时，执行期权的收益为$\max\{X-S_N^j,0\}$。现在，我们来看时刻$N-1$，即倒数第二个阶段。如果期权在样本路径上是溢价的，即$S_{N-1}^j<X$，则我们可以考虑执行期权，但是，是否真的执行期权，我们还要考虑继续持有期权至到期日的期望收益，如果它小于$X-S_{N-1}^j$，则立刻执行期权，否则继续持有期权。我们使用（7）式近似继续持有期权的期望价值。由于提前执行期权的前提条件是期权在执行时刻是溢价的，所以，我们仅以那些在 N-1 时刻处于溢价的样本路径为基础进行回归。考虑那些在时刻处于溢价的样本路径的子集，我们用以下回归方程近似继续持有期权的期望收益：

$$E\left[y_{N-1}^j\right]=e^{-r\Delta t}\max\left\{X-S_N^j,0\right\}a_1+a_2S_{N-1}^j+a_3(S_{N-1}^j)^2,j\epsilon J_{N-1}$$
（8）

这样，我们在进行提前执行的决策时，只需比较时刻 N-1 的内在价值$X-S_{N-1}^j$与继续持有期权的价值，它们均只与当前的价格有关而不必考虑未来价格S_N^j。同理，我们可以求得时刻 N-1, N-3, …, 0 继续持有期权的期望收益。对于每条样本路径 j，期权要么在某个唯一的时刻$t_j^*\epsilon\{0,1,\ldots N\}$执行，要么永远不会执行。因此，样本路径在时刻继续持有期权的期望收益为：

$$E\left[y_i^j\right]=e^{-r\left(t_j^*-i\right)\cdot t\Delta t}\max\left\{X-S_{t^*}^j\cdot j,0\right\}\approx a_1+a_2S_i^j+a_3(S_i^j)^2$$
$$t_j^*\epsilon\{0,1,\ldots,N\},j\epsilon J_i \qquad (9)$$

其中，J_i是在时刻i期权处于溢价的样本路径的集合。在初始状态，我们令$t_j^*=N$，在时刻 N-1，如果继续持有期权，则t_j^*不

变；如果执行期权，则$t_j^* = N - 1$，以此类推。由于每条样本路径只有一个最优执行时间，我们只保存最新的t_j^*，最后我们求得每条样本路径的最优执行时间。相应地，样本路径j在最优执行时间t_j^*的期权收益为$f_{i^*j}^j = \max\{X - S_{i^*j}^j,\}$。

第三步：对每条样本路径的期权收益体现并求均值

经过 M 次模拟后，得到 M 条样本路径，以及每条样本路径上最优执行时间的期权收益$f_{i^*j}^j = \max\left\{X - S_{i^*j}^j, 0\right\}, j \epsilon \{1,2,\dots,M\}$。由于每条样本路径的执行时间不同，对期权收益的贴现因子e^{-rt^*k}也不同，所以，必须按相应的贴现因子贴现，然后求均值即得到式（1）中期望收益的一个估计值，即美式期权 LSM 模拟的一个模拟值：

$$E[f(S_0, S_1, \dots S_{T^*}, \dots, S_T)] = \frac{\sum_{K=1}^{M} e^{-rt_k^*} f_{t_k^*}^k}{M} \qquad (10)$$

（三）LSM 模拟算法的收敛性和计算效率

LSM 算法的有效性包括收敛性和计算效率两个方面。它们主要取决于奇函数数目 K、离散时间点数目 N、样本路径数目 M，以及模拟随机数的产生方法。关于 LSM 算法的收敛性，Longstaff 和 Schwartz 证明，令样本路径数目 M 趋于无穷，只要基函数数目足够大，则模拟期权价值收敛于真实期权价值的 ε 领域内（ ε 为任意正数）。此外，LSM 算法很重要的一个特点便是它优异的计算效率，尤其在多维（多个标的资产）美式期权定价模拟方面，与处理多维美式期权定价模拟方面，与处理多维美式期权定价模拟的随机网络方法相比，该算法的计算效率高出 600 多倍。

二、二叉树定价模型

二叉树方法是利用分支树法（Tree Approach）来求解美式期权价值的数值方法中的一种。该方法是由 Cox，Ross 和 Rubinstein（1979）提出的，其初衷是为了以二叉树方法来提供 B-S 期权定价模型的一种简化推导方法。但其后的研究将其发展成为对美式期权和更为复杂的期权（如奇异期权）的基础定价方法。二叉树模型既可以用于欧式期权的定价也可以用于美式期权的定价。

（一）二叉树模型算法的基本思想

二叉树方法的基本思想是在风险中性的条件下，将期权价格的连续时间随机过程离散化，再利用离散节点所形成的价格树状路径反向求解该期权的价值。具体而言，首先假设风险中性成立，即对于所有的可交易资产的预期收益率(Return)为无风险利率，且对于资产报酬（Payoff）的定价为在无风险利率下其预期价值的折现值。二叉树期权定价模型假设标的物波动只有向上和向下两个方向，且假设在整个考察期内，标的物价格每次向上(或向下)波动的概率和幅度不变。模型将考察的存续期分为若干阶段，根据标的物价格的历史波动率模拟出正股在整个存续期内所有可能的发展路径，并对每一路径上的每一节点计算期权行权收益和用贴现法计算出的期权价格。对于美式权期权，由于可以提前行权，每一节点上期权的理论价格应为期权行权收益和贴现计算出的期权价格两者较大者。以此类推，最后计算出美式期权的价

格。

（二）二叉树模型算法的实现步骤

二叉树模型算法的基本步骤如下：首先，在风险中性成立基础上，确定价格风险中性概率，并据此构造二叉树形。其次，在每一路径上的每一节点计算期权行权收益和用贴现法计算出的期权价格。对于美式权期权，每一节点上期权的理论价格应为期权行权收益和贴现计算出的期权价格两者较大者，最后在树的末端的期权价格由反向归纳的方式对期权定价。下面我们以单一标的美式看跌期权定价为例，说明二叉树模型算法的实现步骤。

第一步：确定风险中性概率。

首先将期权的期限分成许多很小的时间区间，每个长度为Δt。我们假定在每一个时间段里标的物价格从开始的价格S变为两个新价格Su及Sd中的一个。一般来讲，$u > 1, d < 1$。因此，S到Su的变化被称为价格上涨变化，S到Sd的变化被称为价格下跌变化。

我们构造一个由Δ份的标的物多头和 1 份该股票期权的空头来组成的无风险证券组合，其损益如下：

当标的物价格上升时，标的物价格为Su，期权的价值为f_u，组合的价值为$\Delta Su - f_u$；

当标的物价格下跌时，标的物价格为Sd，期权的价值为f_d，组合的价值为$\Delta Sd - f_d$。

要求两种情况下组合的价值相等，故

$$\Delta Su - f_u = \Delta Sd - f_d$$

解得 $\Delta=\frac{f_u-f_d}{Su-Sd}$

在风险中性假设下，该组合的收益率必为无风险收益率，故其期末收益的现值为$(\Delta Su-f_u)e^{-rT}$，而构造组合的成本为$\Delta S-f$，故$(\Delta Su-f_u)e^{-rT}=\Delta S-f$。

从而我们可以求得该期权的价格为

$$f=e^{-rT}[pf_u+(1-p)f_d]$$

式中$p=\frac{e^{rT}-d}{u-d}$，这便是我们所要求的风险中性概率。

第二步：计算每条样本路径的最优执行时间和期权收益

假定将一个美式期权的期限分成N个长度为Δt的时间区间。我们称在时间$i\Delta t$的第j个节点为(i,j)节点，其中$0\le i\le N, 0\le j\le i$。令$f_{i,j}$为期权在(i,j)节点上的值，标的资产在(i,j)节点上的价格为$S_0u^jd^{i-j}$。如果是看涨期权，它在时间T（到期日）的值为$\max(S_T-K,0)$，因此

$$f_{N,j}=\max(S_0u^jd^{N-j}-K,0),\quad (j=0,1,\dots,N)$$

如果是看跌期权，它在时间T（到期日）的值为$\max(S_T-K,0)$，因此$f_{N,j}=\max(K-S_0u^jd^{N-j},0)$，$(j=0,1,\dots,N)$

在$i\Delta t$时，从(i,j)节点移动到$(i+1)\Delta t$时刻，$(i+1,j+1)$节点的概率为p；在$i\Delta t$时刻从节点(i,j)移动到$(i+1)\Delta t$时刻$(i+1,j)$节点的概率为$1-p$。假定期权没有被提前行使，由风险中性定价原理可以得出，对$0\le i\le N-1$和$0\le j\le i$，

$$f_{i,j}=e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1}+(1-p)f_{i+1,j}]$$

当考虑提前行使期权时，式中的$f_{i,j}$必须同期权的内涵价值进行比

较，因此对于看涨期权

$$f_{i,j}=\max\{S_0u^jd^{i-j}-K,e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1}+(1-p)f_{i+1,j}]\}$$

对于看跌期权

$$f_{i,j}=\max\{K-S_0u^jd^{i-j},e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1}+(1-p)f_{i+1,j}]\}$$

注意，由于定价计算从T时刻开始并以倒推形式进行，所以在$i\Delta t$时刻的期权价值不仅反映了在$i\Delta t$时刻提前行使期权的可能性对于期权价值的影响，而且也反映了将来时刻提前行使期权对于期权价值的影响。

这样，在二叉树的每个节点上我们需要检验在这一节点行使期权是否比在下一个时间区间后持有期权更有利。最后，以倒推的形式走过所有的节点，我们就可以得出期权在 0 时刻的价格。

对欧式期权而言，研究表明，当时间区间数目 N 趋于无穷时，二叉树模型定价的数值解收敛于 B-S 模型定价。

三、BAW 期权定价模型

由于美式期权不存在封闭解，一个可行的近似解逼近是很必要的。首先，近似解逼近在计算上是很有效的；其次，这样的逼近不需要求回归系数，而回归系数是需要不断调整的。其中，Barone-Adesi 和 Whaley 提出的 BAW 模型是最为著名的一个美式期权定价模型。

BAW 模型是基于 Macmillan 模型来定价的，本节先介绍 Macmillan 模型。这两个模型都是基于这样一个原理：美式期权可以分解为两部分，一部分是欧式期权定价，另一部分是由于合

约增加提前实施条款而需要增付的期权金。

（一）Macmillan 模型

Macmillan 提出了不支付红利的美式看跌期权的解析近似解，由 Black-Scholes 的定价公式，我们得到了不支付红利的欧式期权的价格。在不支付红利的情形下，而且参与者保持理性，美式看涨期权是不好被提起实施的。所以美式看涨期权和欧式看涨期权，在不支付红利的情形下在任何时刻都会有相同的价格。但是美式看跌期权在股价够低的时候，就有可能会被提早实施，所以美式看跌期权的价格总是高于或等于相应的欧式看跌期权的价格。

由 B-S 定价公式的推导过程中，我们知道美式看跌期权满足下面的偏微分方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

在终止时间$t=T$，

$$V(S,T)=(K-S)^+$$

当$S\to\infty$时，

$$V(S，t)\to 0。$$

我们假设美式看跌期权的价格满足下列形式：

$$V_A(S,t)=V_E(S,t)+e(S,t)$$

其中$e(S,t)$为美式期权的提前实施金。因为欧式看跌期权和美式看跌期权都满足上面的偏微分方程，所以提前实施金$e(S,t)$也满足同样的偏微分方程，即：

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 e}{\partial S^2}+rS\frac{\partial e}{\partial S}-re=0$$

由于欧式看跌期权和美式看跌期权都满足边界条件：

$$V_A(S,T)=\max(K-S,0)=V_E(S,T)$$

所以提前实施金必须满足$e(S,T)=\lim_{t\to T}e(S,t)=0$的条件，这样才能保证上面的边界条件被满足。另外，我们令$\tau=T-t$，则我们将提前实施金所满足的偏微分方程改写为：

$$-\frac{M}{r}\frac{\partial e}{\partial \tau}+S^2\frac{\partial^2 e}{\partial S^2}+MS\frac{\partial e}{\partial S}-Me=0$$

其中$M=\frac{2r}{\sigma^2}, e_\tau=-e_\tau$，$\tau=T-t$。

假设提前实施金满足：

$$e(S,T)=X(\tau)f(S,X)$$

则

$$\frac{\partial e}{\partial S}=X\frac{\partial f}{\partial S},\quad \frac{\partial^2 e}{\partial S^2}=X\frac{\partial^2 f}{\partial S^2},\quad \frac{\partial e}{\partial \tau}=\frac{\partial X}{\partial \tau}f+X\frac{\partial X}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial X},$$

此外，我们令$X(\tau)=1-e^{-r\tau}$，则上面的偏微分方程可以改写为：

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+MS\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{M}{X}[1+(1-X)X\frac{\frac{\partial f}{\partial X}}{f}]=0$$

忽略掉包含$(1-X)X$的项，我们得到了以下的近似方程：

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+MS\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{M}{X}f=0$$

这是一个二阶的常微分方程，有两个形式为aS^ρ的线性独立解。将$f=aS^\rho$代入上面的近似方程，我们得到：

$$\rho^{2} + (M-1)\rho - \left(\frac{M}{X}\right) = 0$$

则$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + MS\frac{\partial f}{\partial S} - \frac{M}{X}f = 0$一般解的形式为：

$$f(S) = a_1 S^{\rho_1} + a_2 S^{\rho_2}$$

接着我们使用边界条件来决定常数a_1和a_2的值。如果$a_2 \neq 0$则美式看跌期权的价格在$S \to \infty$时越接近于无穷大，这违反了边界条件$\lim_{S\to\infty} V_A(S,t) = 0$，所以我们令$a_2 = 0$为了便于讨论。下面我们用a来取代$a_1$，ρ取代$\rho_1$，则$f = aS^{\rho}$，所以我们得到了：

$$V_A(S,t) = V_E(S,t) + \left(1 - e^{-r\tau}\right)aS^{\rho} = V_E + Xf$$

如果$a < 0$，则美式看跌期权的价值将低于欧式看跌期权的价值。这是不合理的。所以$a > 0$。美式看跌期权提前实施金满足的边界条件是$K - S$，当美式看跌期权价值切于边界条件的切点的临界股价S^*之上，美式看跌期权的价值由上式表示。

当股价在S^*之下，则美式看跌期权价值等于履约价值$K - S$。当股价等于临界股价S^*时，美式看跌期权履约价值$K - S^*$等于美式看跌期权价值$V_A(S,\tau)$，即：

$$K - S^* = V_E(S^*,\tau) + Xa(S^*)^{\rho} \qquad (*)$$

由此我们可以求出临界股价S^*。又由边界条件：

$$-1 = \frac{\partial V_E(S^*,\tau)}{\partial S^*} + Xa\rho(S^*)^{\rho-1}$$

可以得到$a = \frac{N(d_1(S^*))}{X\rho(S^*)^{\rho-1}}$。将 a 值代入（*）式，我们得到：

$$V_A(S,\tau) = K - S \qquad 当S < S^*$$

$$V_A(S,\tau) = V_E(S^*,\tau) - \frac{S^* N(d_1(S^*))}{\rho} \qquad 当S \geq S^*$$

（二）Barone-Adesi-Whaley 模型

由 Barone-Adesi 和 Whaley 提出的模型被称为 BAW 模型，它是 B-S 模型的直接推广。

考虑一个红利率为q的支付连续红利的股票期权。$e(S,t)$表示美式期权和欧式期权的价格之差，即提前实施金。如同 Macmillan 的讨论，我们得到：

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 e}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial e}{\partial S}-re=0$$

为了方便起见，我们定义：

$$\tau=T-t，$$

$$e(S,X)=X(\tau)f(S,X)，$$

$$X(\tau)=1-e^{-r\tau}，$$

$$M=\frac{2r}{\sigma^2}，\quad L=\frac{2(r-q)}{\sigma^2}。$$

通过适当的代换和变量置换，得出

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+LS\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{M}{X}f-(1-X)M\frac{\partial f}{\partial X}=0$$

所用的近似方法就是假设上式的最后一项为零，所以：

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+LS\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{M}{X}f=0$$

美式看涨期权和看跌期权的价格分别用$C(S)$和 $P(S)$，其中 S 是股票价格，相应的欧式看涨期权和看跌期权的价格分别用 $c(S)$和 $p(S)$表示。加上边界条件后，得到：

$$C(S)=\begin{cases} c(S)+A_2\left(\frac{S}{S^*}\right)^{\gamma_2} & \text{当 } S<S^* \\ S-K & \text{当 } S\geq S^* \end{cases}$$

变量S^*是股票价格的临界点，当股票价格超过它时，期权应该被执行。

同理，对于看跌期权，估值公式为：

$$P(S)=\begin{cases} p(S)+A_1\left(\frac{S}{S^{**}}\right)^{\gamma_1} & \text{当 } S>S^{**} \\ K-S & \text{当 } S\leq S^{**} \end{cases}$$

其中，

$$\gamma_1=\frac{[-(L-1)-\sqrt{(L-1)^2+\frac{4M}{X}}]}{2};$$

$$\gamma_2=\frac{[-(L-1)+\sqrt{(L-1)^2+\frac{4M}{X}}]}{2};$$

$$A_1=-\left(\frac{S^{**}}{\gamma_1}\right)\{1-e^{-q(T-t)}N(-d_1(S^{**}))\};$$

$$A_2=-\left(\frac{S^{*}}{\gamma_2}\right)\{1-e^{-q(T-t)}N(-d_1(S^{*}))\};$$

$$d_1(S)=\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-T}}。$$

四、定价模型对比

期权定价模型是做市商报价基础，它决定了做市商能否提供富有吸引力的价格，此外定价的正确与否也直接关系到做市商的盈亏。三类模型在计算精度和速度上各有利弊，这里从理论上和数据上对其进行对比。

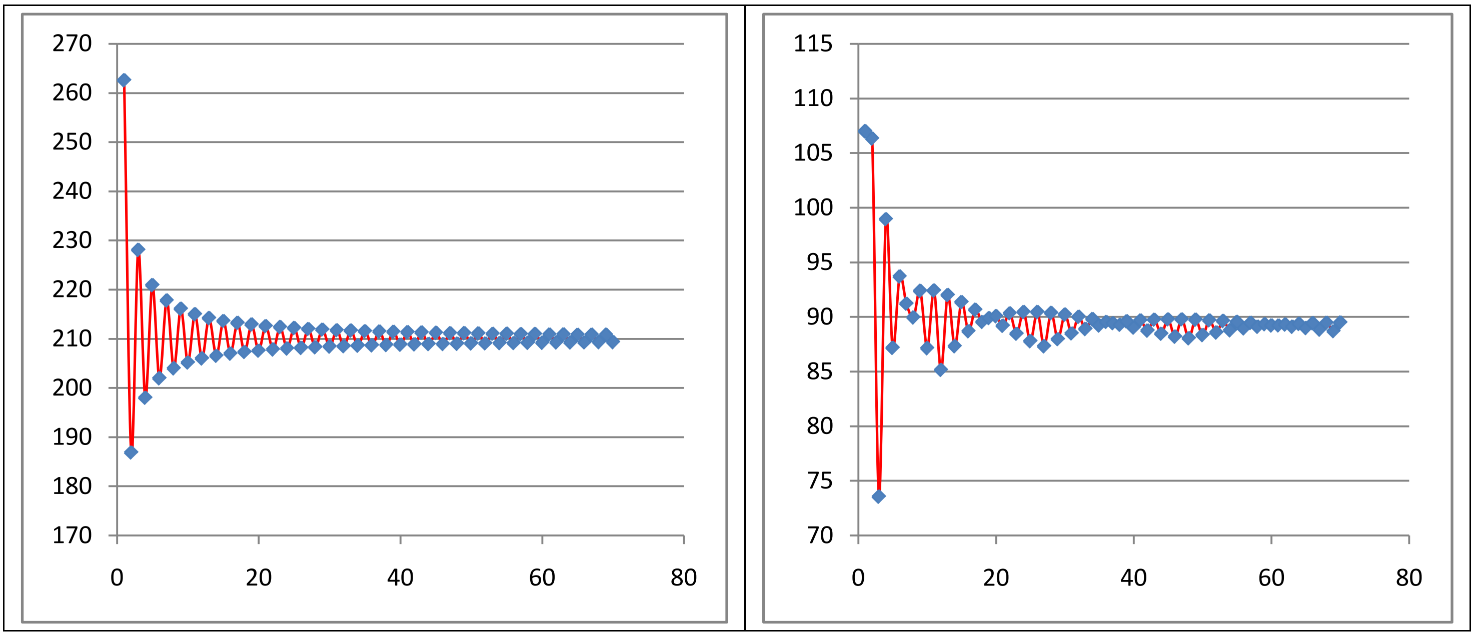
（一）三类定价模型理论对比

从定价方法来看，最小二乘蒙特卡洛模拟，二叉树法属于数值定价方法，而 BAW 模型属于近似解析解的定价方法。

1、　二叉树法采用逆向求解的计算方法

二叉树方法所涉及的数学理论简单易懂，计算过程直观，并且分支书法具备较好的扩展性，可以很容易地和蒙特卡洛模拟或有限差分法结合使用，随着步数增加，计算结果趋于收敛。但在处理多个状态变量时计算消耗较为庞大。虽然可将二叉树进行改进以便处理多个状态变量的期权定价，但其在计算多个标的资产的定价问题时，会由于随标的资产个数增加所导致的节点个数的指数级增加而使得该算法不具备可计算性。此外，二叉树法亦无法处理存在路径依赖的期权定价问题。

图 6：二叉树收敛性研究



注：（左）看涨平值；（右）看涨虚值；（横轴）步长个数；（纵轴）权利金

2、蒙特卡洛与最小二乘蒙特卡洛模拟方法

与二叉树法相比，蒙特卡洛模拟法具有以下几个明显的优势：首先，蒙特卡洛模拟的计算步骤简单，算法容易实现；其次，蒙特卡洛模拟算法具有较好的适用性，该算法的标准差以及收敛速度与解决问题的维数之间的独立性较强，因此适用于多个状态变量，或多个标的资产的衍生证券的定价问题；在次，可以适用于状态变量服从常见的随机过程，不存在分布假设要求；此外，蒙特卡洛模拟还可以适用于存在路径依赖的期权定价；最后，蒙特卡洛模拟的形式较为灵活，算法可以通过许多方式改进。另一方面，蒙特卡洛模拟也存在一些缺点：如蒙特卡洛模拟需要讨论收敛性、误差界限不确定；模拟结果精度较低，且在路径样本较小时结果具有较大的波动方差；可以通过增加模拟路径和减少方差来提高计算精度，但计算效率随精度的增加而降低；由于是向前模拟计算，因此不能用于评价美式期权的价值；存储量较大等。

最小二乘蒙特卡洛模拟在继承蒙特卡洛模拟方法的优点的同时，解决了传统模拟不能向后迭代寻求美式期权最优行权时间的问题，从而将模拟算法成功的运用于美式期权的运算，它也有效降低了运行模拟算法所需的存储量和计算量。此后，有学者对最小二乘法蒙特卡洛模拟进行了改进，从计算结果的收敛性、计算存储量以及计算时间等方面有效提高了该模拟算法的有效性和计算效率。

3、BAW 近似解析解的“近似”由来

BAW 模型产生的是近似解析解，这里需要从推导过程去理解“近似”的意义。推导的假设和过程是严谨的，近似来源于推导中的一个表达式。

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+MS\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{M}{X}\left[1+(1-X)X\frac{\frac{\partial f}{\partial X}}{f}\right]f=0$$

这里$X(\tau)=1-e^{-r\tau}$。当$\tau=0$和$\tau\to\infty$时，$(1-X)X=0$，所以当τ足够大或者足够小的时候，忽略掉$(1-X)X$，我们依然可以得到精确值；当τ介于中间，忽略掉$(1-X)X$将会产生误差。而 BAW 模型是基于忽略掉$(1-X)X$而生成的近似方程求解。

$$S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}+MS\frac{\partial f}{\partial S}-\frac{M}{X}f=0$$

这将导致该模型定价在期限较短情景下比较准确，期限较长时有较大偏差。此外，做市商选择模型还会遵循简单性和固定性原则。简单性是指要尽量选择参数易得，定价机制简单，可操作性强的模型。固定性是指不要经常性更换模型，更换模型会增加计算机设施负荷，也加剧了交易员的操作风险。

（二）三类定价模型情景数据对比

为对比三类定价模型在不同场景下的计算精度，本节假设无风险利率 5%，以一万步二叉树模型计算的价格作为标准价着重测试期限、波动率、执行价和标的价对各模型的影响。

表 16：二叉树模型、最小二乘蒙特卡洛模型与 BAW 模型情景检测

	二叉树 1000 步	二叉树 1000 步偏	最小二乘蒙特卡洛 10000 路径	LSM 偏离度	BAW	BAW 偏离度	标准价（二叉树 1 万步）

				离度					
情景一（期限3天，波动率10%,执行价格3000）	2950	看涨	0.335	0.30%	0.3485	3.720%	0.336	0.00%	0.336
		看跌	50.323	0.00%	50.4508	0.254%	50.32	0.01%	50.323
	3000	看涨	10.844	0.02%	10.8201	0.239%	10.846	0.00%	10.846
		看跌	10.844	0.02%	10.8201	0.239%	10.846	0.00%	10.846
	3080	看涨	80.006	0.00%	80.492	0.607%	80.003	0.00%	80.006
		看跌	0.015	0.00%	0.019	26.667%	0.015	0.00%	0.015
情景二（期限3个月，波动率20%,执行价格5000）	4800	看涨	110.997	0.03%	110.3358	0.562%	111.055	0.09%	110.959
		看跌	309.211	0.01%	308.1191	0.341%	309.158	0.01%	309.173
	5000	看涨	198.082	0.02%	197.2471	0.442%	198.207	0.04%	198.123
		看跌	198.082	0.02%	197.2471	0.442%	198.207	0.04%	198.123
	5600	看涨	629.556	0.00%	629.3964	0.027%	629.141	0.07%	629.564
		看跌	34.005	0.03%	34.0613	0.133%	34.089	0.22%	34.016
情景三（期限1年，波动率30%,执行价格7000）	6700	看涨	649.12	0.02%	651.5775	0.398%	652.038	0.47%	648.996
		看跌	939.661	0.01%	938.3005	0.131%	942.419	0.31%	939.533
	7000	看涨	802.761	0.02%	802.2786	0.079%	806.037	0.39%	802.913
		看跌	802.761	0.02%	802.2786	0.079%	806.037	0.39%	802.913
	7800	看涨	1292.339	0.01%	1293.386	0.092%	1294.813	0.20%	1292.20
		看跌	516.959	0.03%	516.5606	0.049%	519.963	0.61%	516.816

通过观察可以得到以下几个结论：

1、二叉树精度只与步长个数有关，1000 步的二叉树模型可以精确到十分位附近；

2、期限较短的情景里（小于 3 个月），BAW 精度较高，最小二乘蒙特卡洛效果最差；而中长期情况正好相反；

3、在计算速度上，BAW 用时最少 0.001 秒；1000 步二叉树 1.485 秒其次；路径数目 10000，步数 365 的最小二乘蒙特卡洛方法运行时间不到 30 秒。

就三种方法比较而言，二叉树和 LSM 对于短期期权定价都是

适用的，差别非常小，误差控制在 0.2%以内；但就中长期期权而言，BAW 方法定价偏高，和二叉树，最小二乘蒙特卡洛模拟误差达到 0.5%。做市商在做市过程中应根据不同情况选用不同的定价模型，这样才能够在计算精度与速度二者间寻找到平衡点。